Ejercicios de Cálculo
Relación 1: Números y desigualdades

Para empezar este curso te propongo que reflexiones sobre algunas propiedades de los números que son tan familiares que nos parecen *evidentes*. Pero en Matemáticas no hay nada *evidente*. Una afirmación de una teoría matemática o es un axioma de dicha teoría o puede deducirse de los axiomas y de otros resultados ya conocidos usando las reglas de inferencia lógica usuales. En los siguientes ejercicios las letras x, y representan números.

1. ¿Sabes probar que $0x = 0$? Inténtalo.
2. ¿Qué entiendes por $-x$? ¿Es cierto que $-x$ es negativo?
3. Escribe con palabras lo que afirma la igualdad $(-x)y = -xy$. ¿Sabes probarla?
4. Demuestra que si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$ (en consecuencia $1 > 0$).
5. ¿Sabes por qué no se puede dividir por 0?
6. Seguro que sabes construir un segmento de longitud $\sqrt{2}$. ¿Y de longitud $\sqrt{3}$?
7. ¿Qué quiere decir que un número no es racional? Demuestra que $\sqrt{2}$ no es racional.

Es muy importante que aprendas a trabajar correctamente con desigualdades. Yo creo que en el bachillerato no se le da a este tema la importancia que merece. Fíjate que algunos de los conceptos más importantes del Cálculo se definen mediante desigualdades (por ejemplo, la definición de sucesión convergente o de límite de una función en un punto). Por ello, tan importante como saber realizar cálculos más o menos complicados, es aprender a manejar correctamente desigualdades, y la única manera de hacerlo es con la práctica mediante numerosos ejemplos concretos. Por supuesto, siempre *deben respetarse cuidadosamente las reglas generales que gobiernan las desigualdades entre números* y asegurarse de que se usan correctamente. Aparte de tales reglas no hay otros métodos generales que nos digan cómo tenemos que proceder en cada caso particular.

8. Calcula para qué valores de x se verifica que $\dfrac{2x-3}{x+2} < \dfrac{1}{3}$.
9. Discute la validez de las relaciones:

$$\textbf{a)}\ |x| - |y| = |x-y|; \quad \textbf{b)}\ |x-5| < |x+1|$$

10. ¿Es cierto que $0 < x+y-xy < 1$ siempre que $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$?
11. Sabiendo que $a+b > c+d,\ a > b,\ c > d$; ¿se verifica necesariamente alguna de las desigualdades: $a > c,\ a > d,\ b > c$ o $b > d$? Dar una prueba o un contraejemplo en cada caso.

12. Discutir la validez de las igualdades:

$$\textbf{a)}\ |x+y+z| = |x+y| + |z|; \quad \textbf{b)}\ |x-y+z| = |x| - |z-y|$$

13. Pruébese cada una de las siguientes desigualdades y dígase, en cada caso, cuándo se da la igualdad.

    i) $2xy \leqslant x^2 + y^2$.

    ii) $4xy \leqslant (x+y)^2$.

    iii) $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$.

    iv) $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc$ donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

    v) $abc \leqslant 1$ donde $a > 0, b > 0, c > 0$ verifican $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = 8$.

    Sugerencia: para probar i) considérese $(x-y)^2$. Las demás desigualdades pueden deducirse de i).

14. Pruébense la desigualdad: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a+b-x} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ siempre que $0 < a < x < b$.